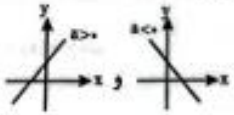
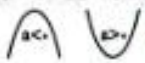
توابع چندجمله‌ای

- تعریف: هر تابع به‌صورت $y = ax^n + bx^{n-1} + \dots + c$ که در آن، n عدد صحیح نامنفی و ضرایب، اعداد حقیقی هستند $(a \neq 0)$.
- دامنه: $\mathbb{R}$
- برد: برد توابع چندجمله‌ای با درجهٔ فرد، برابر $\mathbb{R}$ است.
- مهم‌ترین توابع چندجمله‌ای

تابع ثابت
- ضابطه: $y = k$
- نمودار آن به‌صورت است.
- دامنه: $\mathbb{R}$
- برد: $\{k\}$

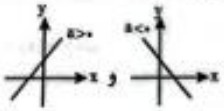
تابع خطی (درجه ۱)
- ضابطه: $y = ax + b \ (a \neq 0)$
- نمودار آن به‌صورت  و است.
- دامنه: $\mathbb{R}$
- برد: $\mathbb{R}$

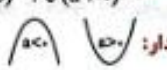
تابع سهمی (درجه ۲)
- ضابطه
  - $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$
  - $y = a(x+b)^2 + c \ (a \neq 0)$
- نمودار: 
- دامنه: $\mathbb{R}$
- برد
  - $[\frac{-\Delta}{4a}, +\infty) : a > 0$
  - $(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}] : a < 0$

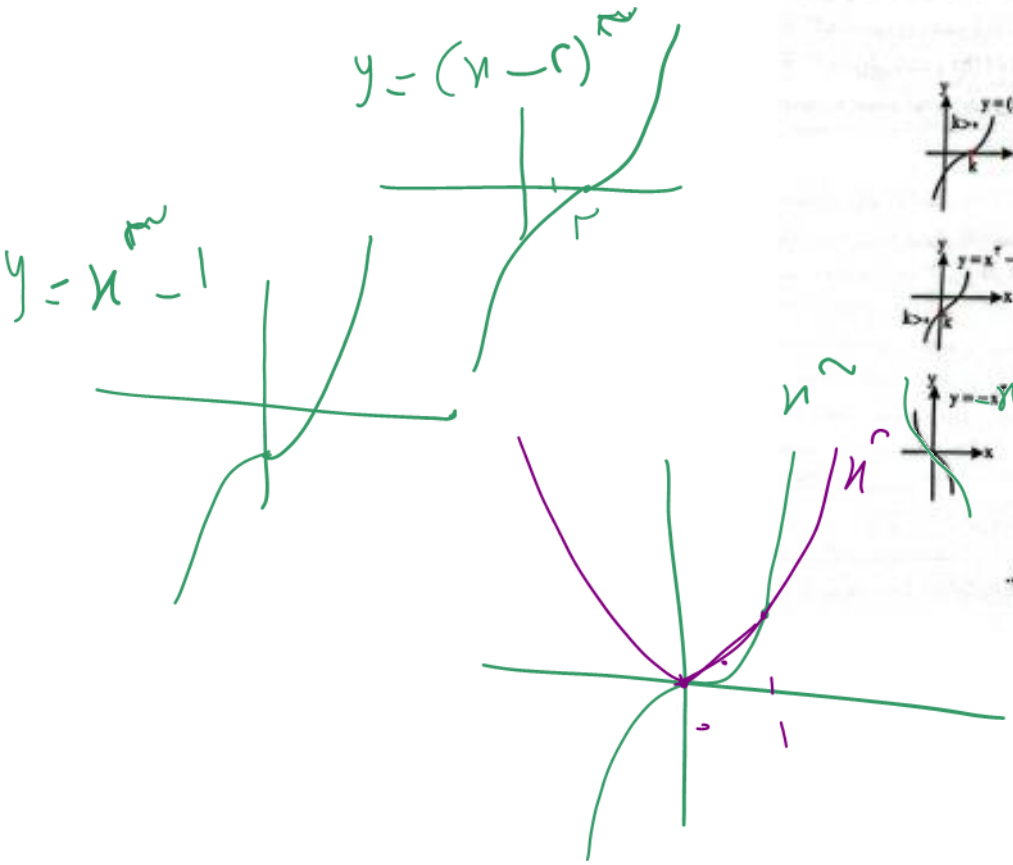
توابع چندجمله‌ای

- تعریف: هر تابع به‌صورت $y = ax^n + bx^{n-1} + \dots + c$ که در آن، n عدد صحیح نامنفی و ضرایب، اعداد حقیقی هستند $(a \neq 0)$.
- دامنه: $\mathbb{R}$
- برد: برد توابع چندجمله‌ای با درجهٔ فرد، برابر $\mathbb{R}$ است.
- مهم‌ترین توابع چندجمله‌ای

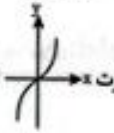
تابع ثابت
- ضابطه: $y = k$
- نمودار آن به‌صورت است.
- دامنه: $\mathbb{R}$
- برد: $\{k\}$

تابع خطی (درجه ۱)
- ضابطه: $y = ax + b \ (a \neq 0)$
- نمودار آن به‌صورت  است.
- دامنه: $\mathbb{R}$
- برد: $\mathbb{R}$

تابع سهمی (درجه ۲)
- ضابطه
  - $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$
  - $y = a(x+b)^2 + c \ (a \neq 0)$
- نمودار: 
- دامنه: $\mathbb{R}$
- برد
  - $[\frac{-\Delta}{4a}, +\infty) : a > 0$
  - $(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}] : a < 0$

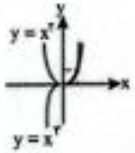


تابع درجه ۳

- **ضابطه**
  - $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$
  - $y = a(x+b)^3 + c \ (a \neq 0)$
- نمودار $y = x^3$ به صورت  است.
- **رسم به کمک انتقال**
  - انتقال افقی

  - انتقال عمودی

  - قرینه کردن

- مقایسه با نمودار $y = x^2$ 

  - در بازهٔ $(0,1)$، نمودار $y = x^3$ پایین‌تر از نمودار $y = x^2$ قرار می‌گیرد.

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۱. تابع $y = 2x(1-3x^2)+1$ ، یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ سوم است. درست

۲. تابع $y = \sqrt{3}x^3 - \pi x + 1$ ، یک تابع چندجمله‌ای است. درست

۳. تابع $y = \sqrt{2}x^3 - \frac{3}{4}x$ ، یک چندجمله‌ای از درجه ۳ است. درست

۴. دامنهٔ توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است. درست

۵. تابع $f(x) = \sin x + 5x^2$ ، یک تابع چندجمله‌ای است. نادرست

۶. تابع $y = 2x^5 - 4x^3 + \sqrt{7}x$ ، یک تابع چندجمله‌ای نیست. نادرست

۷. اگر $f(x) = x^3$ و $g(x) = (x-3)^3$ ، نمودار g را می‌توان از نمودار f با انتقال سه واحد به سمت راست به دست آورد. درست

۸. برد تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^3 + 1$ برابر $\mathbb{R}$ است. درست

جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب پر کنید.

تابع $f(x) = 2x(x - x^2 + 2) + 2x^3$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه ۲ است.

$2x^3 - 2x^3 + 4x + 2x^3$

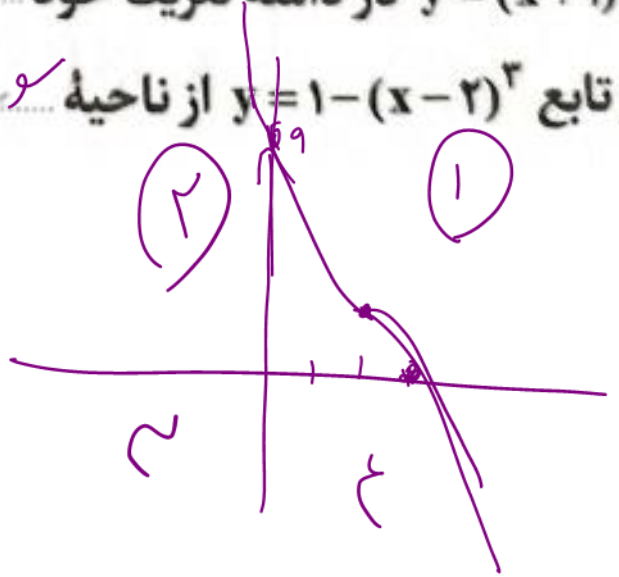
در بازهٔ $(0, 1)$، نمودار تابع $y = x^3$، پایین تر از نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد.

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \bigcirc \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$

تابع $y = (x+1)^3$ در دامنهٔ تعریف خود صعودی (صعودی / نزولی) است.

نمودار تابع $y = 1 - (x-2)^3$ از ناحیهٔ سوم محورهای مختصات عبور نمی‌کند.



به کمک نمودار تابع $y = x^3$ ، نمودار توابع زیر را رسم کنید و سپس دامنه و برد هر یک از آن‌ها را مشخص کنید.

الف) $y=(x+1)^3-2$ ب) $y=-(x-1)^3+1$ پ) $y=-x^3+2$ ت) $y=(-x+2)^3-3$

$y = x^3$

$-x^3$

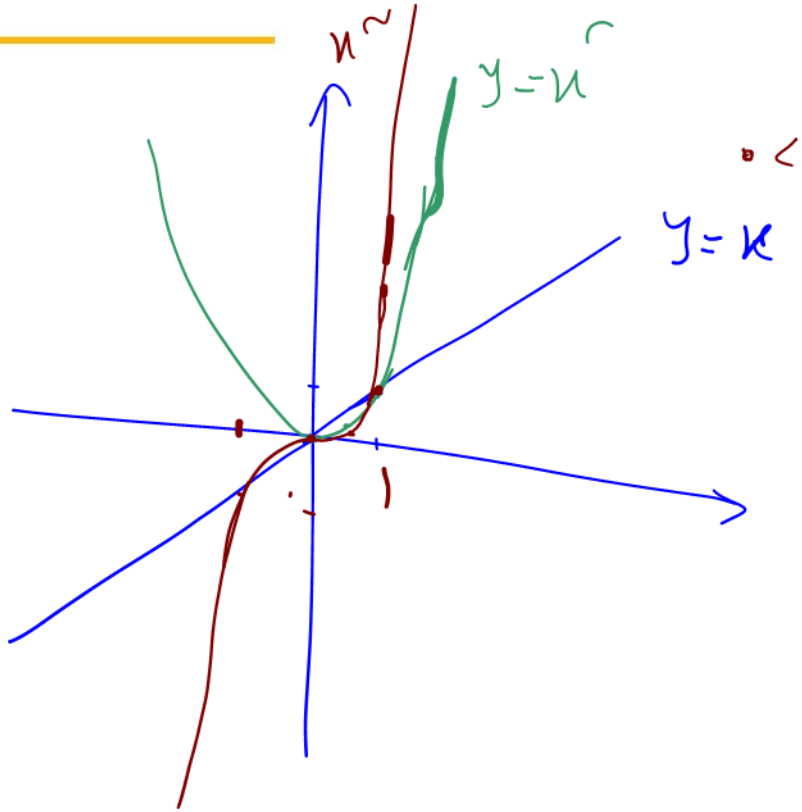
طول عرض

$D_f = R_f = \mathbb{R}$

عرض

$-(x-2)^3-3$

اکیداً نزولی

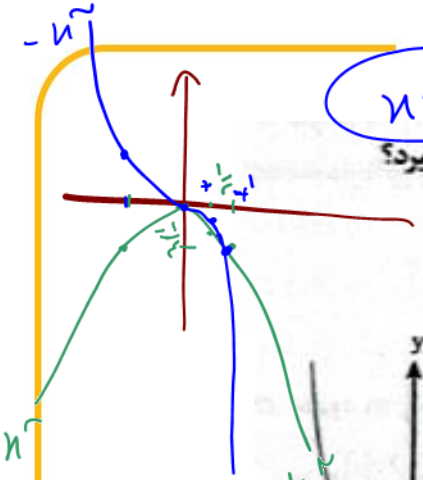


. نمودار توابع $y=x$ ، $y=x^2$ و $y=x^3$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید:

الف) در کدام بازه‌ها، نمودار $y=x^3$ پایین‌تر از نمودارهای توابع $y=x^2$ و $y=x$ قرار می‌گیرد؟ $0<x<1$

ب) در کدام بازه‌ها، نمودار تابع $y=x$ پایین‌تر از نمودارهای توابع $y=x^2$ و $y=x^3$ قرار می‌گیرد؟

$x>1 \rightarrow x^3>x^2>x$



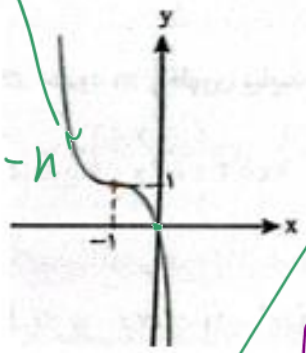
$x>1$

. با رسم نمودار توابع $y=-x^3$ و $y=-x^2$ ، مشخص کنید در کدام بازه (ها) نمودار تابع $y=-x^3$ پایین‌تر از نمودار تابع $y=-x^2$ قرار می‌گیرد؟

توی رسم توابع درجه ۳ به فرم $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ از اتحاد مکعب دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم.

. نمودار تابع $y=x^3-3x^2+3x$ را رسم کنید.

. نمودار تابع $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ به‌صورت شکل مقابل است. مقادیر a ، b ، c و d را مشخص کنید.



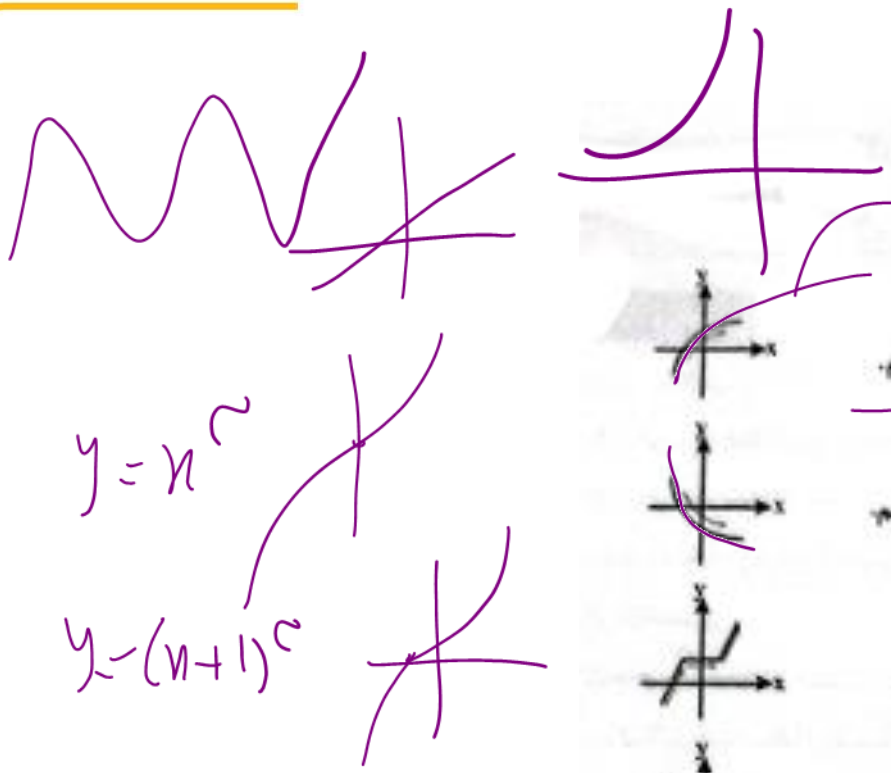
$y=x^3-3x^2+3x-1+1=(x-1)^3+1$

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

$\boxed{d}$

$y=-(x+1)^3+1=-x^3-3x^2-3x-1+1$

$y=1x^3+3x^2+3x$



توابع صعودی و نزولی

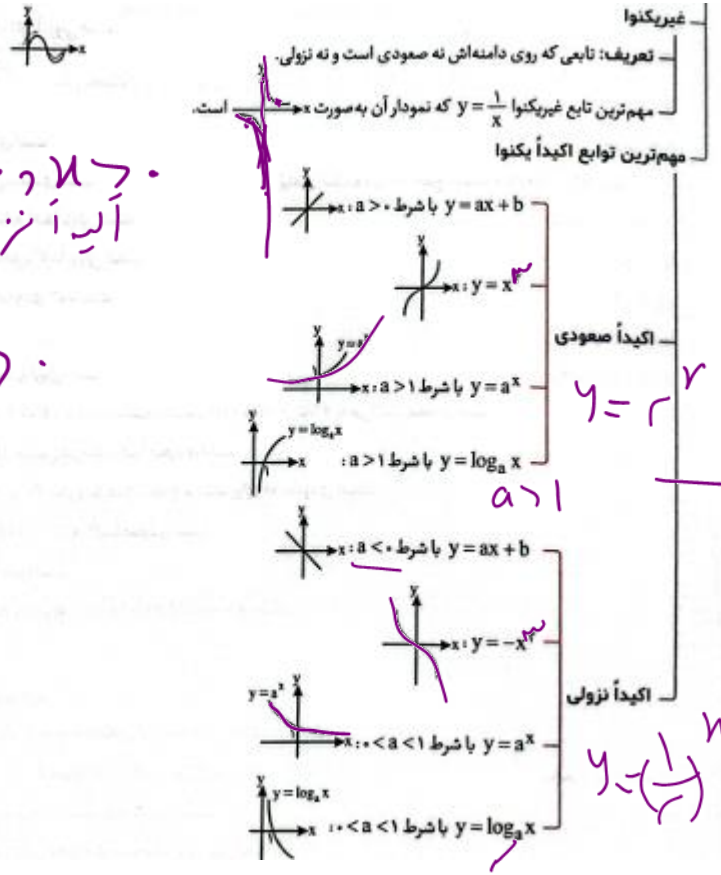
- اکیداً یکنوا
  - اکیداً صعودی
    - تعریف: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
    - نمودار: با حرکت از چپ به راست، همواره رو به بالا حرکت می‌کنیم.
  - اکیداً نزولی
    - تعریف: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$
    - نمودار: با حرکت از چپ به راست، همواره رو به پایین حرکت می‌کنیم.
- یکنوا
  - صعودی
    - تعریف: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$
    - نمودار: با حرکت از چپ و راست، هیچ‌گاه رو به پایین حرکت نمی‌کنیم.
  - نزولی
    - تعریف: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$
    - نمودار: با حرکت از چپ به راست، هیچ‌گاه رو به بالا حرکت نمی‌کنیم.
  - ثابت: تابع ثابت هم صعودی است و هم نزولی!

$x<0$ و $x>0$

اکیداً نزولی دارد

$x<0$ یا $x>0$

اکیداً نزولی ندارد



$y=2^x$

$a>1$

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

$y=\log_{\frac{1}{2}} x$

. تابع $y=\frac{1}{x}$ در دامنه‌اش یکنواست. نادرست

. بی‌شمار تابع وجود دارد که هم صعودی و هم نزولی است. درست

. تابع $f(x)=-1-x^3$ در دامنهٔ خود، اکیداً نزولی است. درست

هر تابع اکیداً یکنوا، یک‌به‌یک است. درست

هر تابع یکنوا، یک‌به‌یک است. نادرست

. تابع $f(x)=x^3$ ، تابعی اکیداً صعودی است. درست

. تابع $y=-x^3+2$ در دامنهٔ تعریفش صعودی است. نادرست

تابع $y=(\frac{1}{2})^x$ در دامنهٔ خود، یک تابع اکیداً نزولی است. درست

. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ در دامنه‌اش، اکیداً نزولی است. نادرست

. تابع $f(x)=|x|$ در بازهٔ $(0,+\infty)$ ، صعودی اکید است. درست

. هر تابع اکیداً یکنوا، یکنوا نیست. نادرست

. تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است. درست

اگر برای هر دو نقطهٔ a و b از دامنهٔ f که $a<b$ است داشته باشیم $f(a)>f(b)$ ، آن‌گاه f تابعی اکیداً صعودی است. نادرست

. تابع $f(x)=\frac{-1}{x}$ روی مجموعهٔ اعداد حقیقی غیرصفر، اکیداً صعودی است. نادرست

. تابع $f=\{(-3,1),(-4,0),(2,5),(0,m)\}$ به‌ازای ۵ عدد صحیح مختلف برای m صعودی است. درست

$(-4,0),(-3,1),(0,m),(2,5)$

$m=\{1,2,3,4,5\}$

تابع $f(x)=|x-1|+|x-2|$ روی بازهٔ $(2,+\infty)$ ، اکیداً صعودی است. درست

. تابع $y=[x]$ در بازهٔ $(-2,2)$ ، اکیداً یکنوا است. نادرست

اگر f تابعی اکیداً نزولی باشد و داشته باشیم $f(2x)>f(x-1)$ ، آن‌گاه $x>-1$ است. نادرست

$2x<x-1$

$x<-1$

۸. اگر تابع $f = \{(1,2),(-2,5),(0,4),(-1,k)\}$ اکیداً نزولی باشد، حدود k را به دست آورید.

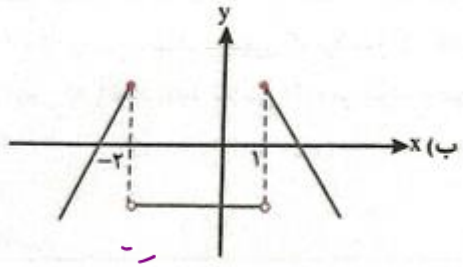
مساوی نداشتیم

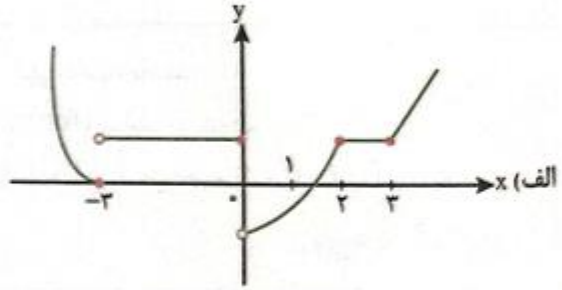
$f = \{(-2,5),(-1,k),(0,4),(1,2)\}$

$4 < k < 5$

نزولی $4 \le k \le 5$

در هر کدام از قسمت‌های زیر، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی (صعودی)، در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی (نزولی) و در چه بازه‌هایی هم صعودی و هم نزولی است.





$x \leq -2$

اکیداً صعودی

$-2 \leq x \leq 1$ هم صعودی هم نزولی

ثابت

$x \geq 1$

اکیداً نزولی

$x \geq 3$

صعودی

$2 \leq x \leq 3$

هم صعودی هم نزولی

$0 < x < 2$

صعودی

$-3 < x < 0$

ثابت (هم صعودی هم نزولی)

$x \leq -3$

نزولی

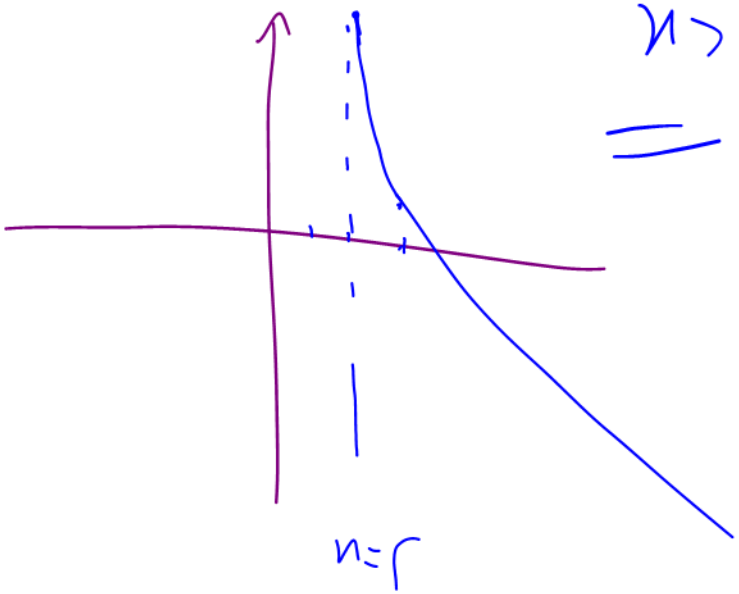
نمودار تابع $y = -\log(x-2)+1$ را رسم کنید و مشخص کنید این تابع در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است؟

آرگومان

$y = -\log(x-2)+1$

x	y
۲	$+\infty$
۳	۱
$+\infty$	$-\infty$

$x > 2$



$x > 2$

نزولی اکیدا =

$-\infty$

$1 - 0 =$

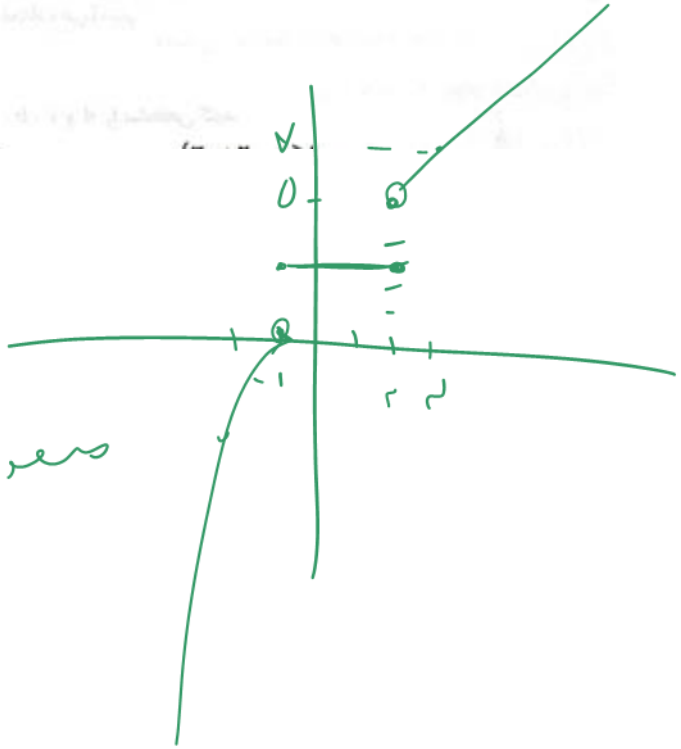
. نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آن تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & ; \quad x>۲ \\ ۳ & ; \quad -۱\le x\le ۲ \\ -x^{۲}+۱ & ; \quad x<-۱ \end{cases}$$

x	۲	۳
y	۵	۷

x	-۱	۲
y	۳	۳

x	-۲	-۱
y	-۳	۰



$x>۲$ و $x<-۱$ صعودی

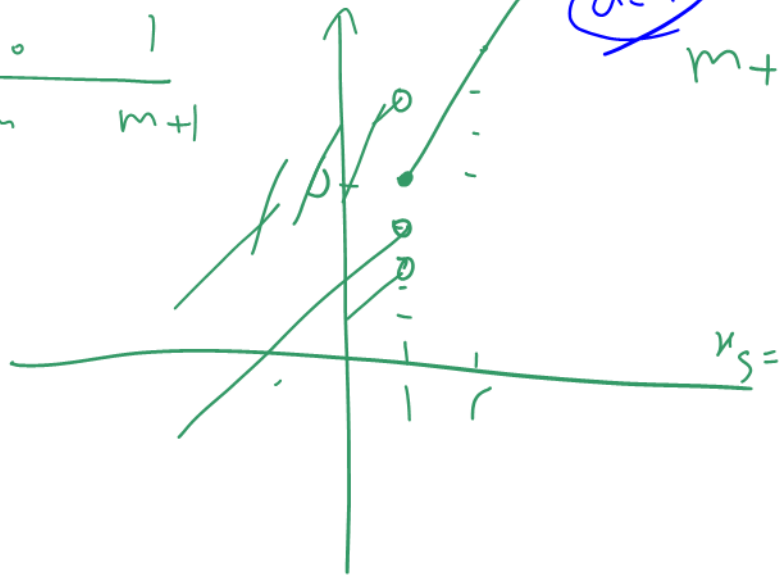
$-۱\le x\le ۲$ ثابت

. حدود m را طوری بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases}3x+2 & ; x\geq 1\\ x+m & ; x<1\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی باشد.

$$y=\begin{cases}3x+2 & x\geq 1\\ x+m & x<1\end{cases}$$

x	1	2
y	5	8

x	0	1
y	m	m+1



$m+1\leq 5 \rightarrow \boxed{m\leq 4}$

. تابع $f(x)=\begin{cases}2x-1 & ; x\geq 2\\ x^2-2x+2 & ; 0<x<2\\ 2 & ; x\leq 0\end{cases}$ در بازهٔ $(-\infty, a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a چه‌قدر است؟

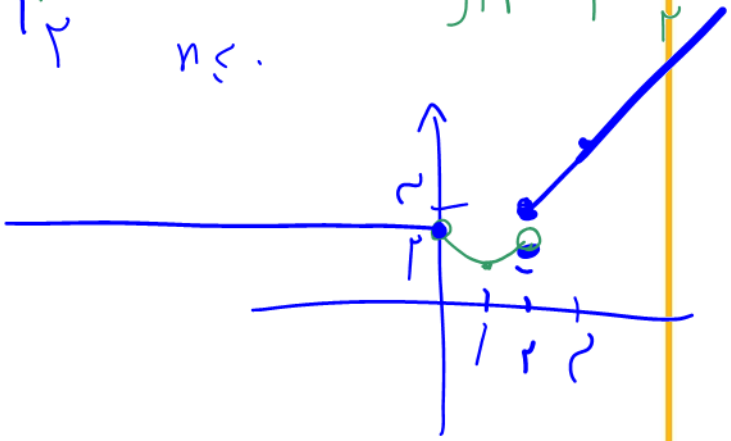
$a=1$

$$y=\begin{cases}2x-1 & x\geq 2\\ x^2-2x+2 & 0<x<2\\ 2 & x\leq 0\end{cases}$$

$x_S=-\frac{b}{2a}=\frac{2}{2}=1$

x	2	3
y	3	5

x	0	1	2
y	2	1	2



اگر $f(a^2+1) < f(3a-1)$ و تابع f اکیداً صعودی باشد، حدود a را بیابید.

از نامعادلهٔ $3^{3x+1} \le \frac{1}{27}$ حدود x را بیابید.

$a^2+1 \in \mathbb{R}$

$3a-1 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$a^2+1 < 3a-1$

$a^2-3a+2<0$

$(a-2)(a-1)<0$

	1		2	
+		−		+

$1<a<2$

$3^{3x+1} \le 3^{-3}$

$3x+1 \le -3$

$3x \le -4$

$x \le -\frac{4}{3}$

$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

$f(g(x))$

$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

$g(f(x))$

تابع مرکب (fog)

- به عنوان یک ماشین: $x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$
- حالت زوج مرتبی: x را از دامنهٔ g انتخاب می‌کنیم و مقدار $g(x)$ را پیدا می‌کنیم. حال $g(x)$ به دست آمده را به جای x در ضابطهٔ f قرار می‌دهیم و $f(g(x))$ را به دست می‌آوریم.
- حالت نموداری: عضوهای روی نمودار را به‌صورت زوج مرتبی می‌نویسیم و مثل حالت زوج مرتبی، fog را به دست می‌آوریم.
- حالت ضابطه‌ای
  - تیپ ۱:

fog	g	f
?	✓	✓

به جای x در ضابطهٔ f، ضابطهٔ g را قرار می‌دهیم.

  - تیپ ۲:

fog	g	f
✓	?	✓

به جای x در ضابطهٔ f، خود g را قرار می‌دهیم و ضابطهٔ $f(g(x))$ را برحسب g می‌نویسیم. ضابطهٔ به دست آمده را با ضابطهٔ fog که داده شده بود، با هم برابر قرار می‌دهیم و g را می‌یابیم.

  - تیپ۳:

fog	g	f
✓	✓	?

ضابطهٔ g را برابر t قرار می‌دهیم و x را برحسب t به دست می‌آوریم. به جای هر x در ضابطهٔ fog، عبارت به دست آمده برحسب t را جای‌گذاری می‌کنیم. f برحسب t به دست می‌آید. دوباره به جای t، x قرار می‌دهیم.

- دامنه: $D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

اگر $f(۲)=۶$ و $g(۱)=۲$ باشد، آن‌گاه $(fog)(۱)=۱۲$ است. نادرست $f(r)=$

اگر $f(x)=۲x+۳$ و $g(x)=\sqrt{x^۲+۳}$ باشد، آن‌گاه $(fog)(۱)=f(۱)$ است. نادرست $f(g(۱))=f(۱)$

$V=۵$

اگر $f(x)=x^۲-۴$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۴}$ ؛ آن‌گاه $(fog)(۵)=-۲۵$ است. نادرست

اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sin x$ باشد، آن‌گاه $(gof)(x)=\sqrt{\sin x}$ خواهد بود. نادرست

$g(f(x))=\sin\sqrt{x}$

$f(\sqrt{g(۵)})=۲۱-۴=۱۷$

جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب پر کنید.

. اگر $f(x)=\frac{|x|}{1+|x|}$ ، مقدار $(fof)(1)$ برابر ..... است.

اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=2x-1$ باشد، آن‌گاه $(fog)(5)$ برابر ..... است.

. اگر $f(7)=5$ و $g(4)=7$ باشد، آن‌گاه $(fog)(4)$ برابر با ..... است.

. تابع $h(x)=(2x^2-5x+1)^2$ به‌صورت ترکیب دو تابع $f(x)=2x^2-5x+1$ و ..... $=g(x)$ است.

.. اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=-x^2$ باشد، دامنهٔ تابع fog برابر ..... است.

اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=-x^2-1$ باشد، دامنهٔ تابع fog برابر ..... است.

اگر $f(x)=x^5-1$ و $g(x)=\sqrt{2x^3}+1$ باشد، دامنهٔ تابع gof برابر ..... است.

هر یک از توابع زیر را به‌صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب‌ها منحصربه‌فرد است؟

ب) $g(x) = (۳x^۲ - ۵x + ۱)^۴$

$f(x) = ۳x^۲ - ۵x + ۱$

$h(x) = x^۴$

$g(x) = h(f(x))$

اگر $f(x)=\sqrt{4-2x}$ و $g(x)=x^2+2x-1$ باشد.

الف) دامنهٔ تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) مقدار $(gof)(2)-(\frac{f}{g})(0)$ را تعیین کنید.

$4-2x \geq 0 \rightarrow 4 \geq 2x \rightarrow \boxed{2 \geq x = D_f}$

$D_g = \mathbb{R}$

$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

$g(f(x))$ $\quad x \leq 2 \cap \sqrt{4-2x} \in \mathbb{R}$

$x \leq 2 \cap \mathbb{R}$

$x \leq 2$

$g(\cancel{f(2)}^{0}) - \frac{f(0)}{g(0)}$

$-1 - \frac{2}{-1}$

$-1+2=1$

اگر $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=x-1$ باشد، آن‌گاه:

الف) دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) ضابطهٔ تابع fog را بنویسید.

$x+1 \geq 0 \rightarrow \boxed{x \geq 1 = D_f}$

$D_g = \mathbb{R}$

$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

$f(g(x))$

$= \mathbb{R} \cap x-1 \geq 1$

$\mathbb{R} \cap x \geq 2$

$= x \geq 2$

$(fog)(x) = f(g(x))$

$= \sqrt{g(x)+1}$

$= \sqrt{x-1+1}$

$= \sqrt{x}$

اگر $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=2x^2-1$ باشد،

الف) دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) مقدار $(gof)(2)$ را تعیین کنید.

پ) ضابطهٔ تابع fog را بنویسید.

$x-1\geq 0 \rightarrow x\geq 1 = D_f$

$D_g = \mathbb{R}$

$D_{fog} = \{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

$= \mathbb{R} \cap 2x^2-1\geq 1$

$2x^2-2\geq 0 \rightarrow x=\pm 1$

	-1		1	
$+$	0	$-$	0	$+$

$x\leq -1 \cup x\geq 1$

$\cap$

$x\leq -1 \cup x\geq 1$

$g(f(2)) = 2-1 = 1$

$f(g(x)) = \sqrt{2x^2-1-1}$

$= \sqrt{2x^2-2}$

دو تابع $f(x)=\sqrt{x-۴}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲-۱}$ را در نظر بگیرید. دامنهٔ تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید

توابع $f(x)=\frac{x+۳}{۲x}$ و $g(x)=۳x-۱$ را در نظر بگیرید، دامنهٔ fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

اگر $f(x)=\frac{۲}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۳}{x}$ باشد، دامنهٔ gof و ضابطهٔ fof را بنویسید.

اگر $f(x)=\sqrt{3-x}$ و $g(x)=\log_2(x^2+2x)$ باشد، دامنهٔ تابع fog را بیابید.

اگر $f(x)=x^2+ax$ و $g(x)=2x+b$ باشد، a و b را طوری تعیین کنید که داشته باشیم $(gof)(x)=2x^2+6x+1$.

اگر $f(g(x))=3x^2-6x+14$ و $f(x)=3x-4$، ضابطهٔ تابع g را به دست آورید.

اگر $(fog)(x)=4x^2+1$ و $f(x)=\frac{x}{2}-1$، آن‌گاه ضابطهٔ تابع g را بیابید.

$3-x\geq 0 \rightarrow 3\geq x = D_f$

$x^2+2x>0 \rightarrow x>0$ یا $x<-2 = D_g$

$x=0,-2$

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

$\rightarrow x>0$ یا $x<-2$ $\cap$ $3\geq \log_2(x^2+2x)$ $\xrightarrow{\text{روی توان ۲}}$ $2^3\geq \cancel{2^{\log_2(x^2+2x)}}$

$8\geq x^2+2x$

$0\geq x^2+2x-8$

$0\geq (x+4)(x-2)$

	-4		2	
+		−		+

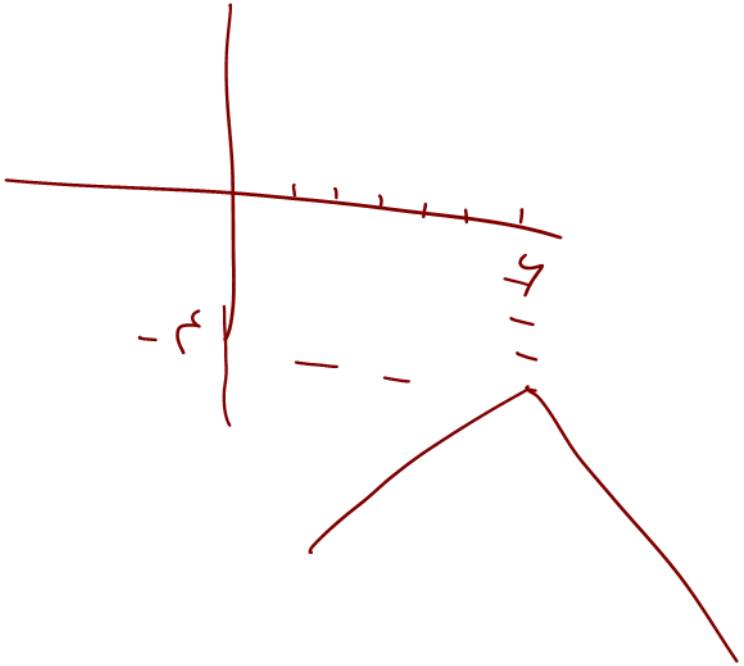
$-4\leq x\leq 2$

$[-4,-2)\cup(0,2]$

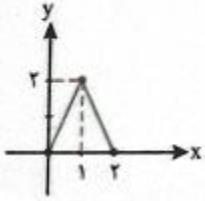
انتقال، تبدیل و قرینه‌یابی

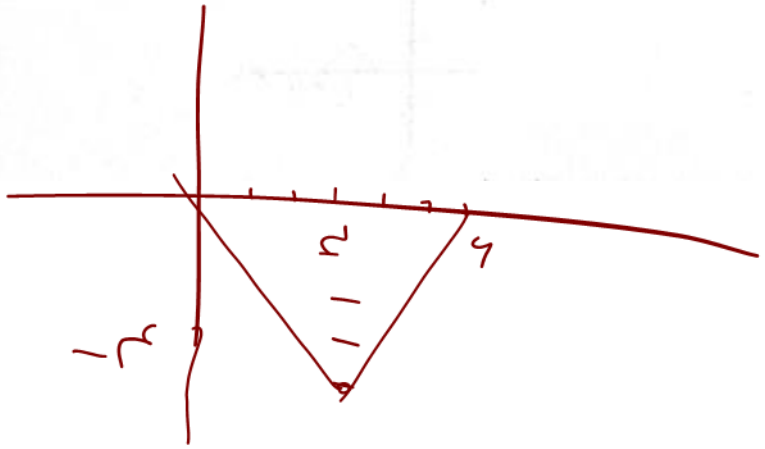
- **انتقال افقی $f(x+k)$**
  - $k>0$: نمودار f را k واحد به چپ می‌بریم.
  - $k<0$: نمودار f را $|k|$ واحد به راست می‌بریم.
- **انتقال عمودی $f(x)+k$**
  - $k>0$: نمودار f را k واحد به بالا می‌بریم.
  - $k<0$: نمودار f را $|k|$ واحد به پایین می‌بریم.
- **تبدیل افقی $f(kx)$**
  - **انبساط افقی $(0<k<1)$** : نمودار f با ضریب $\frac{1}{k}$ در راستای محور x ها کشیده‌تر می‌شود.
  - **انقباض افقی $(k>1)$** : نمودار f با ضریب $\frac{1}{k}$ در راستای محور x ها فشرده‌تر می‌شود.
- **تبدیل عمودی $kf(x)$**
  - **انبساط عمودی $(k>1)$** : نمودار f با ضریب k در راستای محور y ها کشیده‌تر می‌شود.
  - **انقباض عمودی $(0<k<1)$** : نمودار f با ضریب k در راستای محور y ها فشرده‌تر می‌شود.
- **قرینه‌کردن**
  - $-f(x)$: نمودار f نسبت به محور x ها قرینه می‌شود.
  - $f(-x)$: نمودار f نسبت به محور y ها قرینه می‌شود.
  - $-f(-x)$: نمودار f نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌شود.
- $|f(x)|$: برای رسم نمودار $|f(x)|$ از روی نمودار f ، باید قسمتی از نمودار f که پایین محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x ها به بالا قرینه کنیم.

. نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت زیر است. با استفاده از آن، نمودار تابع $y = -2f(\frac{1}{3}x)$ را رسم کنید.



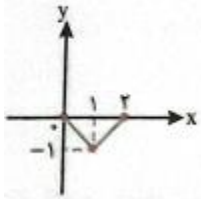
. نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت زیر است. با استفاده از آن، نمودار تابع $y = -2f(\frac{1}{3}x)$ را رسم کنید.





۱

. با استفاده از نمودار تابع f ، نمودار $y=|f(x)|-1$ را رسم کنید.



- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را ابتدا ۳ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و سپس عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم. ضابطهٔ تابع جدید را بنویسید.

$y=2\sqrt{x-3}$

تابع وارون f

- **شرط وارون‌پذیری:** f باید یک‌به‌یک باشد.
- محدودکردن دامنهٔ برخی توابع غیر یک‌به‌یک
  - تابع درجه ۲ ($y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$): در بازه‌های بعد از رأس سهمی یا بازه‌های قبل از رأس سهمی این تابع یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.
  - قدرمطلق $|ax + b|$: در بازه‌های قبل از ریشهٔ داخل قدرمطلق یا بازه‌های بعد از آن، تابع وارون‌پذیر می‌شود.
- **از لحاظ زوج مرتبی:** جای x ها و y های تابع f را عوض می‌کنیم تا f^{-1} به دست بیاید. $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$
- **دامنه:** $D_{f^{-1}} = R_f$
- **برد:** $R_{f^{-1}} = D_f$
- **از لحاظ نموداری:** نمودارهای f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ قرینه‌اند.
- **از لحاظ ضابطه‌ای:** x را تنها می‌کنیم و جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$\begin{cases} x \to f^{-1}(x) \\ y \to x \end{cases}$$

- **ترکیب f و f^{-1}:** ضابطهٔ هر دو تابع (fof^{-1}) و $(f^{-1}of)$ برابر با تابع همانی x است؛ ولی دامنه‌هایشان متفاوت است.

$$\begin{cases} (fof^{-1})(x) = x \Rightarrow D_{(fof^{-1})(x)} = D_{f^{-1}(x)} \\ (f^{-1}of)(x) = x \Rightarrow D_{(f^{-1}of)(x)} = D_{f(x)} \end{cases}$$

درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

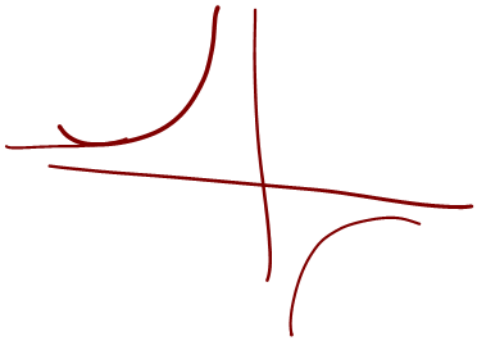
. هر تابع یکنوا، یک‌به‌یک است.

. دو تابع $f(x)=\frac{2x+6}{7}$ و $g(x)=\frac{-7}{2}x-3$ ، وارون یکدیگرند. درست

$\frac{-7x-6}{2}$

دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=x^3$ و $g(x)=\sqrt[3]{x}$ ، وارون یکدیگرند. درست

. نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|x-1|$ ، در بازهٔ $[-1,+\infty)$ وارون‌پذیر است. نادرست



هر تابع وارون‌پذیر، اکیداً یکنوا است. نادرست

. همواره $(fof^{-1})(x)=(f^{-1}of)(x)$ است. نادرست

$D_f=D_{f^{-1}}$

. تابع $f(x)=\frac{2}{3}$ وارون تابع $g(x)=\frac{3}{2}$ است. نادرست

ضابطهٔ تابع وارون هر یک از توابع زیر را به دست بیاورید.

الف) $g(x) = -۵ - \sqrt{۳x+۱}$

ب) $f(x) = \frac{۳x-۲}{x+۱}$

پ) $h(x) = -(x-۱)^۳ + ۲$

$D_g = x \geq -\frac{1}{3}$ $\quad R_g = y \leq -5$

$y = -5 - \sqrt{3x+1}$

$\sqrt{3x+1} = -5 - y$

$3x+1 = (-5-y)^2$

$x = \frac{(5+y)^2 - 1}{3}$

$g^{-1}(x) = \frac{(5+x)^2 - 1}{3}$

$yx + y = 3x - 2$

$(y-3)x = -y-2$

$x = \frac{-y-2}{y-3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-x-2}{x-3}$

$y = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$

$\sqrt[3]{-x+2} + 1 = h^{-1}(x)$

ضابطهٔ تابع وارون هر یک از توابع زیر را به دست بیاورید.

الف) $g(x) = -۵ - \sqrt{۳x+۱}$

ب) $f(x) = \frac{۳x-۲}{x+۱}$

پ) $h(x) = -(x-۱)^۳ + ۲$

اگر $f(x)=\sqrt{x+۳}$ باشد، وارون تابع f و دامنه و برد f و f^{-1} را به دست آورید.

ضابطه و دامنهٔ تابع وارون تابع زیر را به دست آورید.

. با محدودکردن دامنهٔ تابع $h(x) = x^2 - 2x + 2$ ، یک تابع یک‌به‌یک به دست آورید و دامنه و برد تابع f و ضابطهٔ وارون آن را بنویسید.

$y = x^2 - 2x + 1 - 1 + 2$

$x_s = -\frac{b}{2a} = 1$

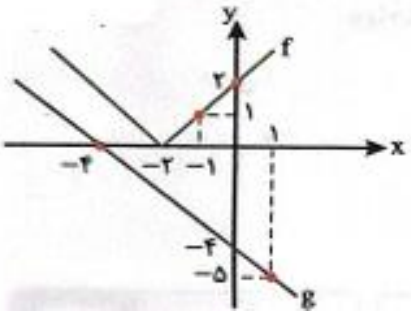
$x \geq 1 \quad - \quad y \geq 1$

$y = (x-1)^2 + \cancel{1}$

$h^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 1$

$x \geq 1 \qquad y \geq 1$

۱۰ار توابع f و g را در نظر بگیرید. با توجه به نمودار، مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید.



الف) $(gof)(-۱)$

ب) $(g^{-۱}of^{-۱})(۲)$

$5 = \frac{1}{8}x - 3$

$8 = \frac{1}{8}x$

$64 =$

$64 = x^3$

$g^{-1}(f^{-1}(5)) = g^{-1}(64)$

$= 4$

. اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ باشد، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(5)$ را به دست آورید.

. اگر تابع g وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(6) + g(12)$ را به دست آورید.

. اگر $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = \sqrt{x - 2}$ باشد، مقدارهای زیر را به دست آورید.

الف) $(fog)^{-1}(3)$

ب) $(gof)^{-1}(5)$

پ) $(f^{-1}og^{-1})(5)$

ت) $(g^{-1}of^{-1})(3)$

$x + \sqrt{x} = 6$

$x = 4$

$4 + 9$

$= 13$

$x + \sqrt{x} = 12$

$x = 9$